

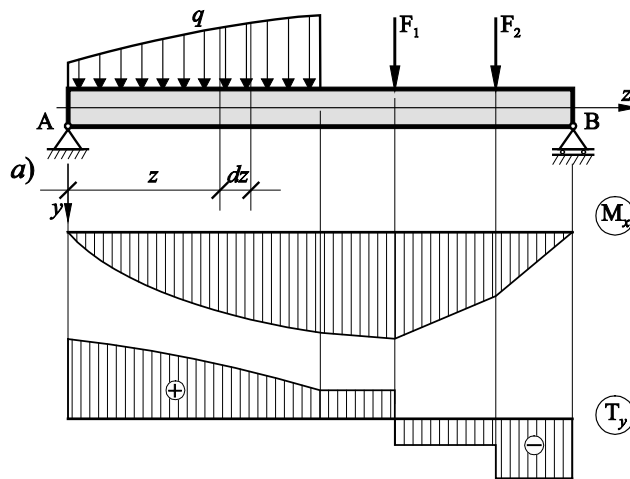
# SAVIJANJE SILAMA

Na predthodnim predavanjima je objašnjeno da se čisto savijanje javlja u djelovima nosača kod kojih je  $M=const.$  i  $T=0$ , što znači da su poprečni presjeci NAPREGNUTI SAMO NA SAVIJANJE (pravo ili koso savijanje).

Mnogo je češći slučaj da su poprečni presjeci nosača napregnuti i napadnim momentom  $M$  koji izaziva napone  $\sigma_z$  i transverzalnom silom  $T$  koja izaziva tangencijalne (smičuće) napone  $\tau$ .

Dakle, savijanje poprečnim opterećenjem je takav vid naprezanja prave grede kod koje se unutrašnje sile u poprečnom presjeku grede svode na jedan moment savijanja i jednu poprečnu silu koji djeluju u jednoj od dvije glavne ravni.

Ovo je najčešći vid naprezanja koje se pojavljuje u građevinskim konstrukcijama, gdje spoljašnje opterećenje djeluje upravno na osovину grede u pravcu jedne od glavnih osa, zbog čega se ono i naziva poprečno opterećenje.



Na slici gore je prikazan primjer grede koja je opterećena poprečnim opterećenjem. U poprečnim presjecima grede (kako se vidi sa gore prikazanih dijagrama presječnih sila  $M_x$  i  $T_y$ ) imamo moment savijanja  $M_x$  i poprečnu transverzalnu silu  $T_y$ .

## Komponentalni naponi

Neka je poprečni presjek gore prikazane grede pravougaonog oblika.

Usljed momenta savijanja  $M_x$  u gredi se javljaju normalni naponi  $\sigma_z$  koji se računaju prema poznatoj Luj Navier-ovoj formuli:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Usljed poprečne transverzalne sile  $T_y$  u svakoj tački poprečnog presjeka grede će se javiti smičući naponi  $\tau_{zy}$  koji, prema hipotezi Žuravskog, djeluje u pravcu i u smjeru napadne poprečne sile :

$$\tau_{zy}^{(T_y)} = \frac{T_y(z) \cdot \bar{S}_x}{b(z) \cdot I_x}$$

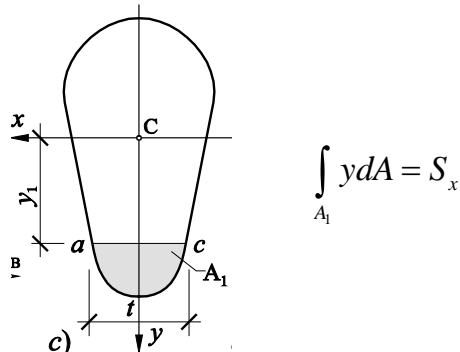
U datoj formuli je:

- $T_y$  transverzalna sila u posmatranom poprečnom presjeku grede,
- $I_x$  aksijalni moment inercije poprečnog presjeka u odnosu na težišnu  $x$  osu,

- $b$  širina grede u posmatranom vlaknu u kojem računamo smičući napon,
- $S_x$  statički moment površine poprečnog presjeka sa donje (pozitivne) strane vlakna u kojem računamo napon u odnosu na neutralnu  $x$  osu.

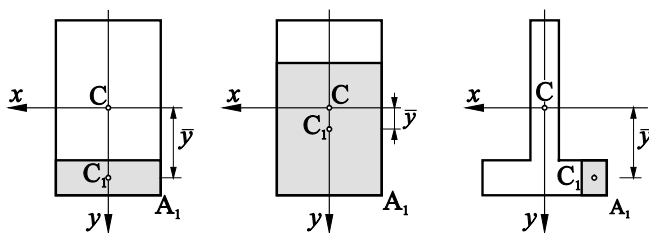
Način računanja statičkog momenta površine ilustrovan je na narednoj slici.

Prema definiciji statički moment površine  $A_I$  u odnosu na osu  $x$  ( $S_x$ ) se može odrediti pomoću integrala kao:



Međutim, ako je poznato odstojanje od neutralne osovine do težišta površine, onda se  $S_x$  određuje kao proizvod dijela površine  $A_I$  i odstojanja težišta predmetnog dijela površine do ose  $x$  prema sljedećoj formuli i slici – geometrijsko značenje statičkog momenta.

$$S_x = A_1 \cdot \bar{y}$$



Iz definicije statičkog momenta koji predstavlja geometrijsku karakteristiku dijela presjeka, vidi se da se isti računa u dužnoj jedinici na 3 stepen, najčešće u  $cm^3$ .

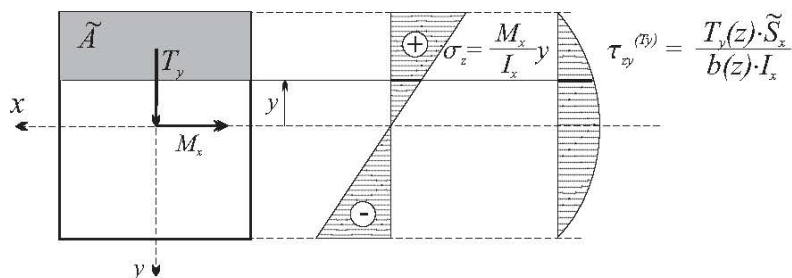
### Hipoteza Žuravskog

Pri pravom savijanju poprečnim opterećenjem, komponenta smičućih napona paralelna ravni savijanja, može se smatrati konstantnom duž ravni paralelnih sa neutralnom osom a komponenta smičućih napona upravna na ravan savijanja može se zanemariti, tj.

$$\tau_{zy} = \tau_{zy}(y); \tau_{zx} = 0.$$

S obzirom da je prema hipotezi Žuravskog poznat smjer smičućeg napona  $\tau_{zy}$  (u smjeru napadne sile  $T_y$ ) sve parametre u izrazu za proračun smičućeg napona možemo uzeti sa znakom +. Bitno je na pravi način prenijeti presječnu transverzalnu silu  $T_y$  sa dijagrama presječnih sila na poprečni presjek.

Konačno na narednoj slici su prikaze komponente napona ili tzv komponentalni naponi usljed savijanja poprečnim opterećenjem, i to normalni napon  $\sigma_z$  usljed  $M_x$  i smičući napon  $\tau_{zy}$  usljed  $T_y$ .



### PRIMJER 1

Za poprečni presjek nosača oblika pravougaonika dimenzija  $b \times h$  odrediti funkciju promjene statičkog momenta  $S_x$  i nacrtati dijagram smičućih napona usljed dejstva poprečne sile  $T_y$ .

### Rješenje

Funkcija promjene statičkog momenta se prema definiciji dobija kao proizvod površine i odstojanja težišta od neutralne ose kao:

$$S_x = A_1 \cdot \bar{y} = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Funkcija promjene je polinom drugog stepena odnosno parabola.

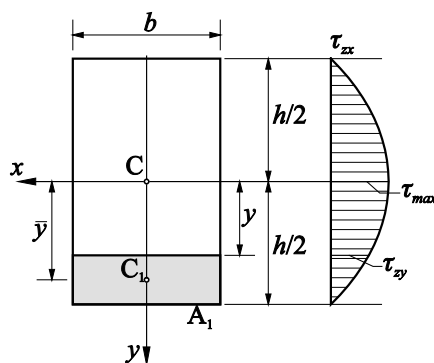
Za pravougaoni presjek je

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \text{ i } t=b=\text{const.}$$

Smičući napon dobijamo prema sljedećoj formuli.

$$\tau_{zy} = \frac{6T_y}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (*)$$

Dijagram  $\tau_{zy}$  napona po visini presjeka:



Jednačina (\*) pokazuje da se napon u poprečnom presjeku oblika pravougaonika mijenja po zakonu parabole drugog reda, pri čemu je:

$$\text{za } y = \pm \frac{h}{2} \quad ; \quad \tau_{zy} = 0$$

$$\text{za } y=0 \quad ; \quad \tau_{zy} = \tau_{max} = \frac{3 T_y}{2 bh} = 1.5 \frac{T_y}{A}$$

Iz dijagrama se vidi da su naponi  $\tau_{zy}$  u gornjoj i donjoj ivici jednaki nuli, i da imaju najveću vrijednost na neutralnoj osi.

Na osnovu izraza (\*) se vidi da je maksimalni napon  $\tau_{max}$  za **50%** veći od prosječnog tangencijalnog napona, koji bi se dobio kada poprečnu silu  $T_y$  podijelimo sa površinom presjeka, tj.

$$\tau_{max} = 1.5 \frac{T_y}{A} = 1.5 \tau_{pr}$$

**Na osnovu ovoga primjera se može zaključiti da je funkcije promjene i statičkog mometa i smičućeg napona parabolična po visini poprečnog presjeka, tako da ubuduće nećemo računati funkcije promjene (ako se izričito ne traži u zadatku), već samo vrijednosti  $S_x$  i  $\tau_{zy}$  u karakterističnim tačkama koje ćemo nanositi na dijagram i spajati ih parabolom.**

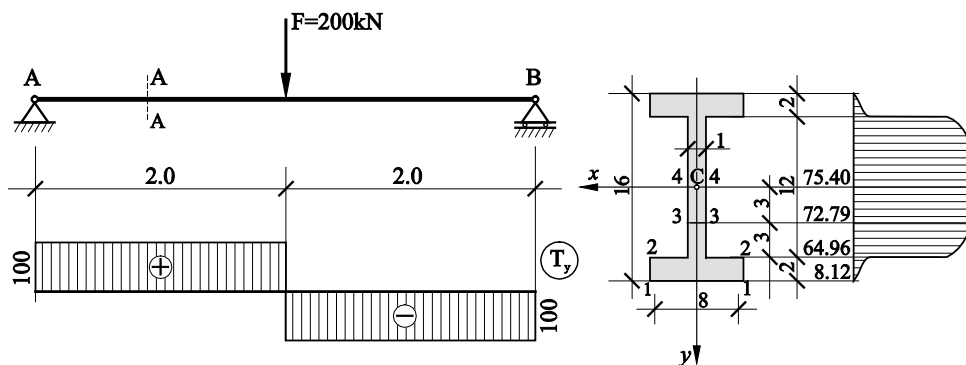
## PRIMJER 2

Greda poprečnog presjeka "I" opterećena je kako je to pokazano na slici. Sračunati smičući napon u poprečnom presjeku A-A u vlaknima 1-1, 2-2, 3-3 i 4-4 označenim na slici i nacrtati dijagram ovih napona.

### Rješenje

Proračun napona ćemo izvršiti kao

$$\tau_{zy} = \frac{T_y S_x}{I_x t}$$



Za proračun nam je potrebno da prethodno izračunamo  $I_x$

$$I_x = \frac{8 \cdot 16^3}{12} - 2 \frac{3.5 \cdot 12^3}{12} = 1723 \text{ cm}^4$$

Takođe ćemo proračunati i količnik  $T_y/I_x$  koji je u izrazu za proračun tangencijalnih napona konstantna veličina. U presjeku A  $T_y^{(A)} = 100 \text{ kN}$  pa je

$$\frac{T_y}{I_x} = \frac{100 \cdot 10^3}{1723 \cdot 10^4} = 5.80 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^4 \text{ odnosno, } \tau_{zy} = 5.80 \cdot 10^{-3} \frac{S_x}{t}$$

## Proračun napona u naznačenim vlaknima

### Vlakno 1-1

U ovom vlaknu statički moment  $S_x$  jednak je nuli a širina smičuće ravni  $t=8cm$ , pa je tangencijalni napon  $\tau_{zy}=0$ .

### Vlakno 2-2

U ovom vlaknu se javlja skok u širini presjeka tako da se u njemu javlja skok i u dijagramu tangencijalnih napona, tj. jedna vrijednost napona se javlja neposredno ispod presjeka **2-2** (dolje) a druga vrijednost neposredno iznad presjeka **2-2** (gore).

$$S_x = 8 \cdot 2 \cdot 7 = 112 cm^3$$

#### a) napon u vlaknu 2-2 dolje

$$t = 8 \text{ cm}$$

$$\tau_{zy} = 5.80 \cdot 10^{-3} \frac{S_x}{t} = 5.80 \cdot 10^{-3} \frac{112 \cdot 10^3}{8 \cdot 10} = 8.12 MPa$$

#### b) napon u vlaknu 2-2 gore

$$t = 1 \text{ cm}$$

$$\tau_{zy} = 5.80 \cdot 10^{-3} \frac{112 \cdot 10^3}{1 \cdot 10} = 64.96 MPa$$

### Vlakno 3-3

$$S_x = 8 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 4,5 = 125.5 cm^3$$

$$t = 1 \text{ cm}$$

$$\tau_{zy} = 5,80 \cdot 10^{-3} \frac{125,5 \cdot 10^3}{1 \cdot 10} = 72.79 MPa$$

### Vlakno 4-4

$$S_x = 8 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 3 = 130 cm^3$$

$$t = 1 \text{ cm}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{\max} = 5.80 \cdot 10^{-3} \frac{130 \cdot 10^3}{1 \cdot 10} = 75.40 MPa$$

Ako analiziramo dijagram na slici gore, lako se uočava da poprečnu silu  $T_y$ , koja izaziva napone smicanja u posmatranom presjeku, u vrlo velikom procentu prima rebro, dok jedan mali procenat primaju nožice. Ova raspodjela je srazmjerna pripadajućim površinama dijagrama, što očigledno potvrđuje gornji zaključak. Iz navedenih razloga se pri praktičnim proračunima uglavnom usvaja da kompletnu smičuću silu prima rebro.

## LITERATURA

1. R. Pejović, Građevinska mehanika (II dio) – OTPORNOST, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2014.
2. R. Pejović, Otpornost materijala, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2015.
3. V. Brčić, Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.
4. V. Lubarda, Otpornost materijala, Univerzitet „Veljko Vlahović“ u Titogradu, Titograd, 1989.